Jochen Weber

Die quadratische Funktion

Eine Funktion mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ heißt quadratische Funktion.

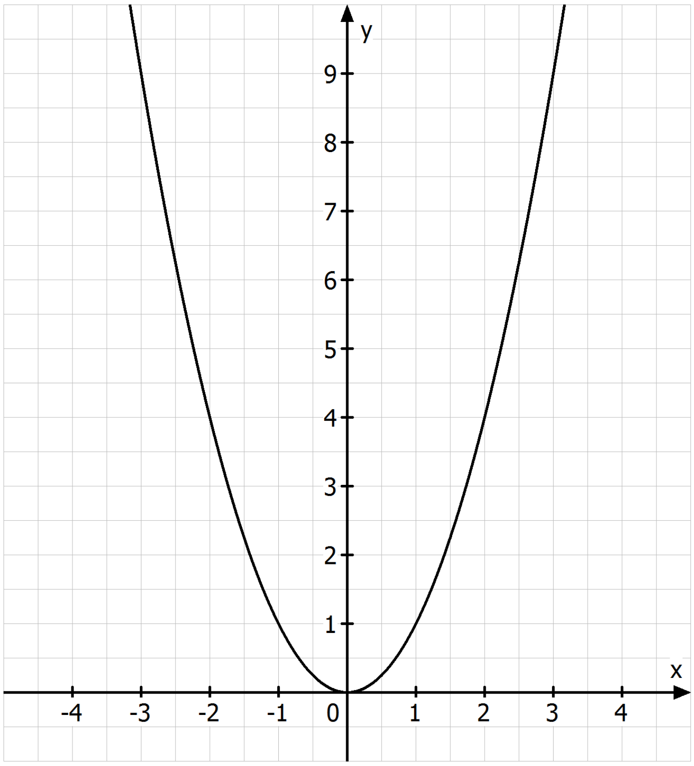
Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel.

(1) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Graph:



Den Graph der Funktion $y = x^2$ nennt man auch Normalparabel.

Eigenschaften der Funktion $y = x^2$:

a) $D_f = \mathbb{R}$ $W_f = \mathbb{R}_0^+$

b) Die y-Achse ist Symmetrieachse

c) Der Scheitel ist der tiefste Kurvenpunkt

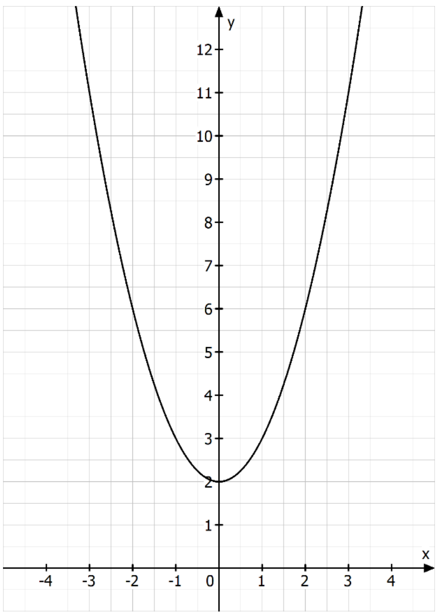
(2) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + t$ $(t \in \mathbb{R})$

Beispiel: $y = x^2 + 2$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	11	6	3	2	3	6	11

Graph:



Der Graph von $y = x^2 + t$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um t in y-Richtung (t > 0: nach oben; t < 0: nach unten).

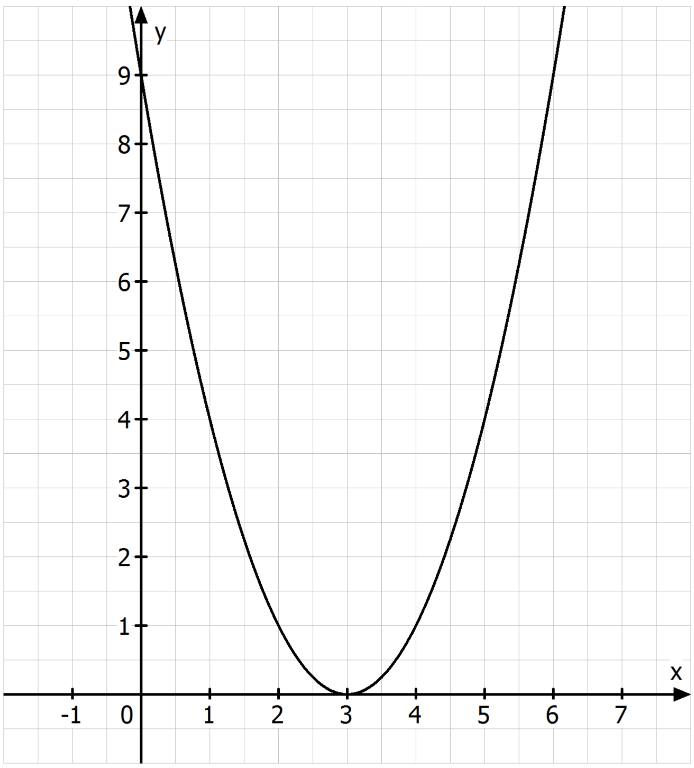
(3) Die Funktion mit der Gleichung $y = (x - s)^2$

Beispiel: $y = (x - 3)^2$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	9	4	1	0	1	4	9

Graph:



Der Graph von $y = (x - s)^2$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um s in x-Richtung ($s > 0$: nach rechts; $s < 0$: nach links).

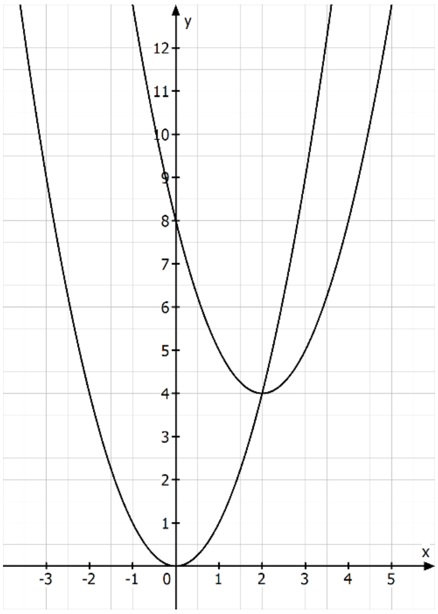
(4) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$

Beispiel: $y = x^2 - 4x + 8$

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	13	8	5	4	5	8	13

Graph:



Der Graph von $y = x^2 + px + q$ entsteht aus der Normalparabel durch eine Verschiebung in x- und y-Richtung.

Im Beispiel:

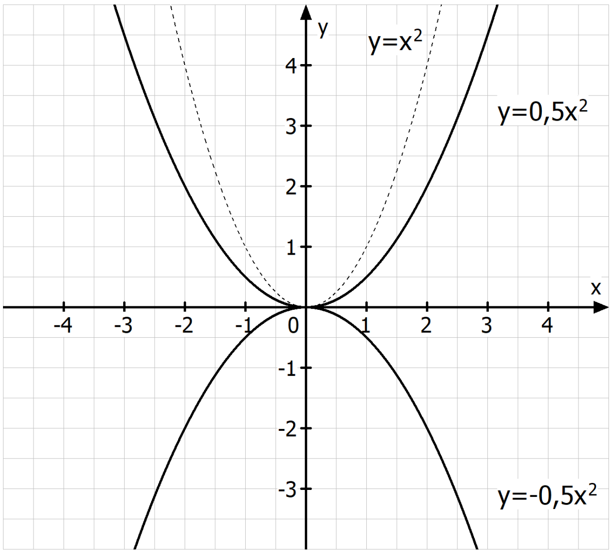
Normalparabel: $y = x^2$
Verschiebung um 2 in x-Richtung: $y = (x-2)^2$
Verschiebung um 4 in y-Richtung: $y = (x-2)^2 + 4$

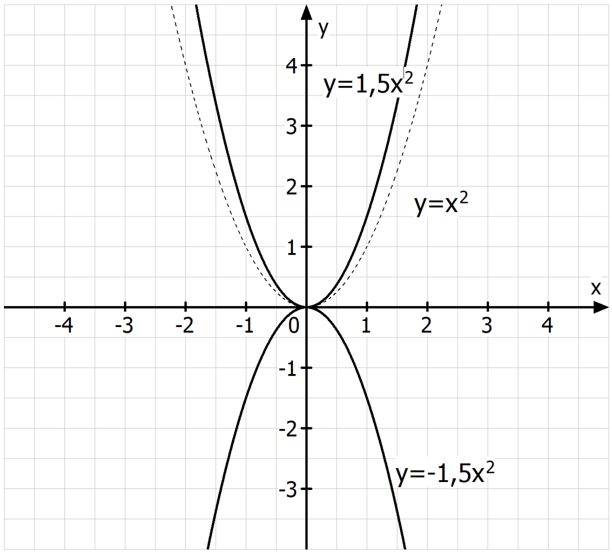
$$y = (x-2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 8$$

Die Gleichung $y = (x - 2)^2 + 4$ enthält die Koordinaten des Scheitels S(2/4) und heißt daher Scheitelgleichung.

(5) Die Funktion mit der Gleichung $y = ax^2$

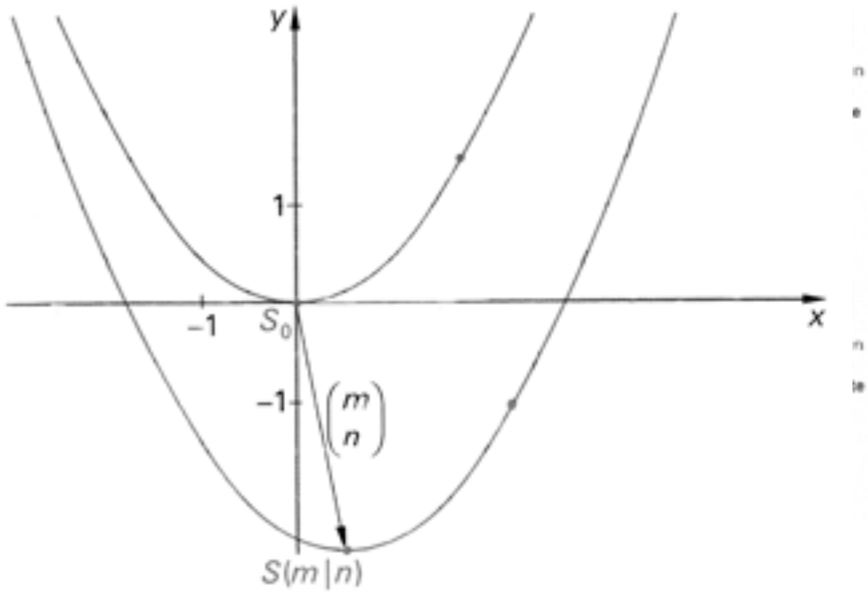
Beispiele: $y = \pm 0{,}5x^2$ $\quad$ $y = \pm 1{,}5x^2$





Die Graphen der Funktionen mit der Gleichung $y = ax^2$ sind Parabeln mit dem Scheitel S(0/0). Ihre Form wird durch die Variable a festgelegt.

(6) Die Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$



Die Graphen der Funktionen mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ sind Parabeln, die durch Parallelverschiebung aus den gestreckten oder gestauchten Normalparabeln mit der Gleichung $y = ax^2$ hervorgehen.

Scheitelbestimmung:

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

$$y_s = c - \frac{b^2}{4a}$$

Scheitelgleichung:

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} \qquad y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

Aufgaben:

1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel $y = 2x^2 + 8x + 8$.

$$x_s = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow x_s = -\frac{8}{2\cdot 2} = -2$$

$$y_s = 2\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) + 8 = 0$$

Scheitelgleichung: $y = 2(x+2)^2 + 0 \quad \Rightarrow y = 2(x+2)^2$

Symmetrieachse: $x = -2$

2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel $y = -x^2 - 4x - 5$.

$$x_s = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow x_s = -\frac{-4}{2\cdot(-1)} = -2$$

$$y_s = -(-2)^2 - 4\cdot(-2) - 5 = -1$$

Scheitelgleichung: $y = -(x+2)^2 - 1$

Symmetrieachse: $x = -2$

3 Von einer Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ sind $a = -3$ und die Koordinaten des Scheitels S(4/2) gegeben.

Bestimmen Sie die Werte der Parameter b und c.

$$y = -3(x-4)^2 + 2 \quad \Rightarrow y = -3(x^2 - 8x + 16) + 2 \quad \Rightarrow y = -3x^2 + 24x - 46$$

4 Die Punkte P(0/6) und Q(3/2) liegen auf einer Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$.

Außerdem ist $a = -2$ gegeben.

Bestimmen Sie die Werte der Parameter b und c.

$$P(0/6) \Rightarrow 6 = -2\cdot 0^2 + 6\cdot 0 + c \quad \Rightarrow c = 6 \quad \text{(I)}$$

$$Q(3/2) \Rightarrow 2 = -2\cdot 3^2 + 3b + c \quad \Rightarrow 2 = -18 + 3b + c \quad \Rightarrow 3b + c = 20 \quad \text{(II)}$$

$c = 6$ in (II) einsetzen: $20 = 3b + 6 \quad \Rightarrow b = \frac{14}{3}$

5 Die Punkte P(-2/-1) und Q(4/1) liegen auf einer Parabel mit der Gleichung y = ax^2 + bx + c.

Außerdem ist a = 5 gegeben.

Bestimmen Sie die Werte der Parameter b und c.

$$P(-2/-1) \Rightarrow -1 = 5\cdot(-2)^2 - 2b + c \quad \Rightarrow -1 = 20 - 2b + c \quad \Rightarrow -2b + c = -21 \quad (\mathrm{I})$$

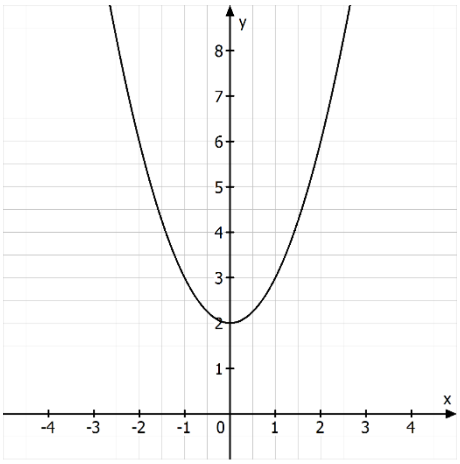
$$Q(4/1) \Rightarrow 1 = 5\cdot 4^2 + 4b + c \quad \Rightarrow 1 = 80 + 4b + c \quad \Rightarrow 4b + c = -79 \quad (\mathrm{II})$$

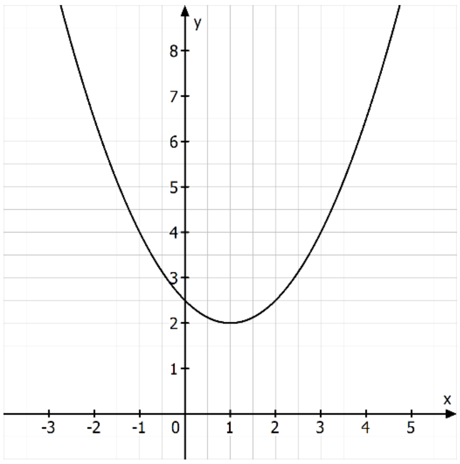
$$(\mathrm{II}) - (\mathrm{I}):\ 6b = -58 \quad \Rightarrow b = -\frac{29}{3}$$

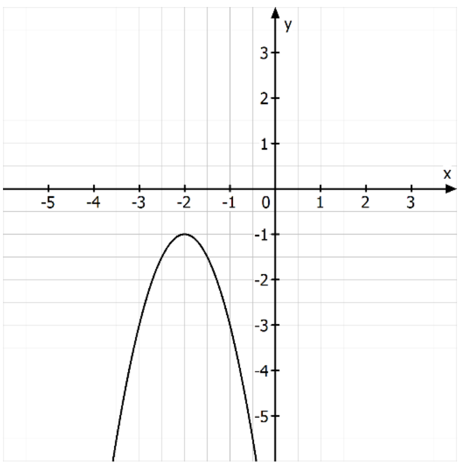
$$b = -\frac{29}{3} \text{ in (II) einsetzen: } -2\cdot\left(-\frac{29}{3}\right) + c = -21 \quad \Rightarrow c = -\frac{121}{3}$$

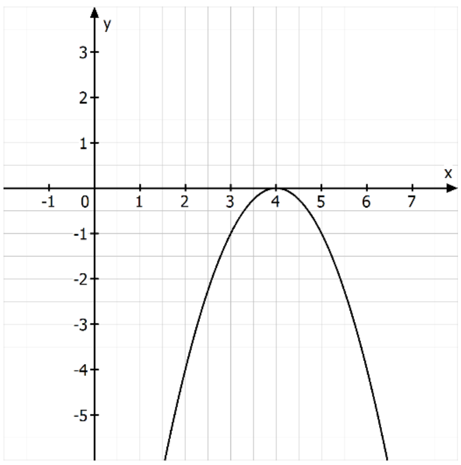
6 Geben Sie die Funktionsgleichungen der abgebildeten Graphen in der

Scheitelpunktform an.









$x^2 + 2 \qquad 0{,}5(x-1)^2 + 2$

$-(x-4)^2 \qquad -2(x+2)^2 - 1$

7.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt.

7.1 Wenn eine Parabel gestaucht ist, gilt $a \leq 1$.

Falsch, für a = -2 ist es eine gestreckte Parabel.

7.2 Wenn die Koordinaten des Scheitelpunkts gleich sind, ist die Parabel nach rechts verschoben.

Falsch, wenn S(-1/-1) ist, dann ist die Parabel nach links verschoben.

7.3 Aus c = 0 folgt, dass die Parabel keinen Schnittpunkt mit der y-Achse hat.

Falsch, für c = 0 verlaufen die Parabeln durch den Ursprung.

7.4 Aus a < -1 folgt, dass die Parabel gestreckt ist.

Richtig.

7.5 Für c > 0 verläuft die Parabel nur im I. und II. Quadranten.

Falsch, Parabel mit $y = x^2 - 8x + 11$ verläuft auch unterhalb der x-Achse.

8.0 Von einer Parabel sind jeweils der Streckfaktor a und die Verschiebung parallel zu den Koordinatenachsen bekannt. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform an.

8.1 a = 1; Verschiebung um 4 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten;

$$y=(x-4)^2-2$$

8.2 a = -2; Verschiebung um 4,5 Einheiten nach oben;

$$y=-2x^2+4{,}5$$

8.3 $a=-\frac{1}{6}$; Verschiebung um 3 Einheiten nach links;

$$y=-\frac{1}{6}(x+3)^2$$

9.0 Die potentielle Energie E(s) einer gespannten Feder kann man durch $E(s)=\frac{1}{2}D\cdot s^2$ beschreiben (Dehnung s, Federkonstante D).

9.1 Bestimmen Sie den Energiezuwachs, wenn D = 350 Nm^{-1} ist, die Feder um 10 cm zusammengedrückt wird und sie keine Vorspannung hat.

$$E(s)=\frac{1}{2}\cdot 350\cdot(0{,}1)^2=1{,}75$$

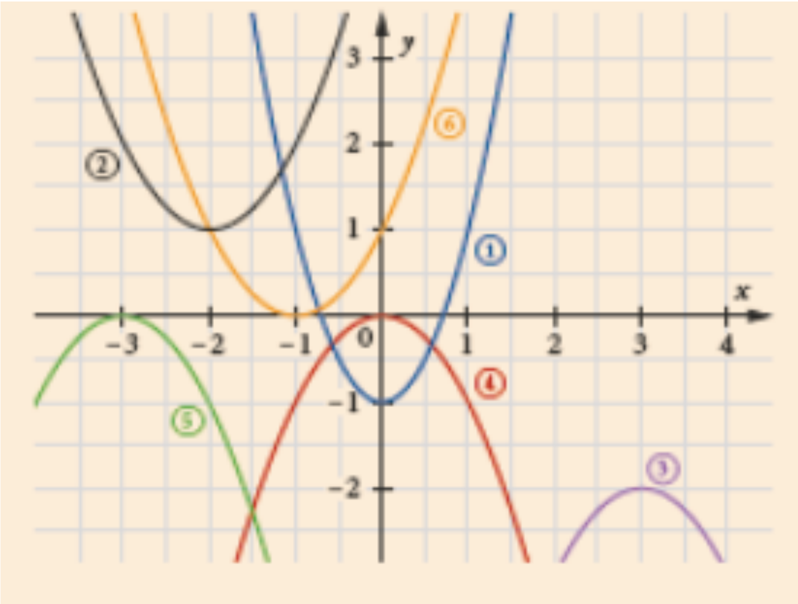
9.2 Bestimmen Sie den Energiezuwachs, wenn D = 350 Nm^{-1} ist, die Feder um 10 cm zusammengedrückt wird und sie 5 cm Vorspannung hat.

$$E(s)=\frac{1}{2}\cdot 350\cdot(0{,}15)^2=3{,}9375$$

10 Ordnen Sie die Graphen und Gleichungen einander zu.

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = 2x^2 - 1$ c) $f(x) = -(x+3)^2$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e) $f(x) = -\left(x-3\right)^2 - 2$ f) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



10a) 4 10b) 1 10c) 5 10d) 6 10e) 3 10f) 2

Nullstellenbestimmung von Parabeln:

Beispiele:

1. $y = x^2 - 10x + 16$ Bedingung: $y = 0$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$ kann mit folgender Formel gelöst werden: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Den Term $(b^2 - 4ac)$ nennt man Diskriminante D.

D > 0: zwei Lösungen

D = 0: eine Lösung

D < 0: keine Lösung

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$x_1 = 8$ $N_1(8/0)$

$x_2 = 2$ $N_2(2/0)$

2. $y = x^2 - 7x + 21$

$x^2 - 7x + 21 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 84}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{-35}}{2}$$

$\Rightarrow$ die Parabel hat keine Nullstellen

3. Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen der Parabel p: $y = x^2 - 6x + k$ in Abhängigkeit von k.

$$x^2 - 6x + k = 0 \quad \Rightarrow x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2}$$

1) $36 - 4k = 0 \quad \Rightarrow k = 9$

p hat eine Nullstelle bei x = 3

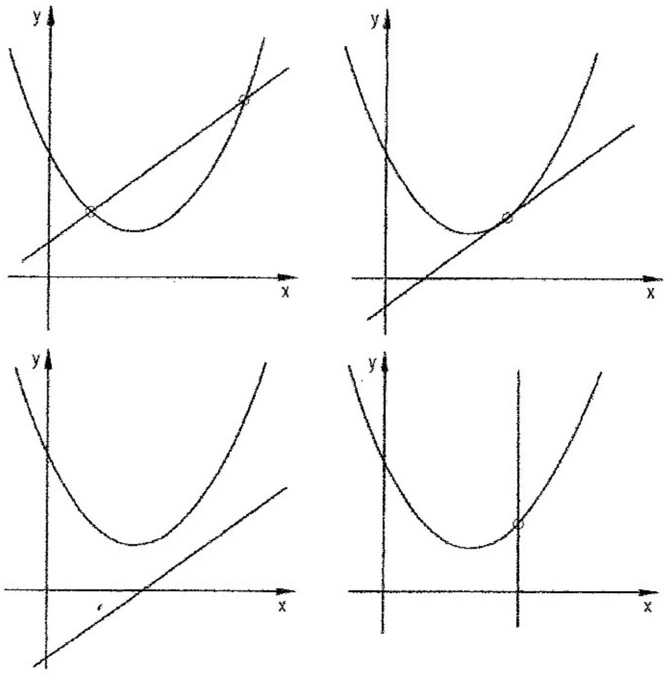
2) $36 - 4k > 0 \quad \Rightarrow k < 9$

p hat zwei Nullstellen bei $x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 4k}}{2}$ und bei $x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 4k}}{2}$

3) $36 - 4k < 0 \quad \Rightarrow k > 9$

p hat keine Nullstelle

Schnittpunkte einer Parabel mit einer Geraden:



Beispiele:

1. $p: y = x^2 - 2x + 3$
   $g: y = 0{,}5x + 1{,}5$

   Bedingung für Schnittpunkte: $p = g$

   $x^2 - 2x + 3 = 0{,}5x + 1{,}5 \quad \Rightarrow x^2 - 2{,}5x + 1{,}5 = 0$

   $x_{1/2} = \dfrac{2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4 \cdot 1 \cdot 1{,}5}}{2} = \dfrac{2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6}}{2} = \dfrac{2{,}5 \pm \sqrt{0{,}25}}{2} = \dfrac{2{,}5 \pm 0{,}5}{2}$

   $x_1 = 1{,}5 \quad x_2 = 1$

   y-Koordinaten der Schnittpunkte: x einsetzen in p (oder g)

   $y_1 = 0{,}5 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 = 2{,}25 \quad \Rightarrow S_1(1{,}5 / 2{,}25)$

   $y_2 = 0{,}5 \cdot 1 + 1{,}5 = 2 \quad \Rightarrow S_2(1/2)$

2. $p: y = 0{,}5x^2 - x + 1{,}5$
$g: y = -2x + 1$

$0{,}5x^2 - x + 1{,}5 = -2x + 1 \quad \Rightarrow 0{,}5x^2 + x + 0{,}5 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}{1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{1} = -1$

$y = -2 \cdot (-1) + 1 = 3 \quad \Rightarrow S(-1/3)$

Die Gerade berührt die Parabel nur in einem Punkt.

Eine solche Gerade nennt man auch Tangente.

3. Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Parabel $p: y = 0{,}5x^2 - x + 1{,}5$ und der Geradenschar $g_a: y = -2x + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von a.

$0{,}5x^2 - x + 1{,}5 = -2x + a \quad \Rightarrow 0{,}5x^2 + x + 1{,}5 - a = 0$

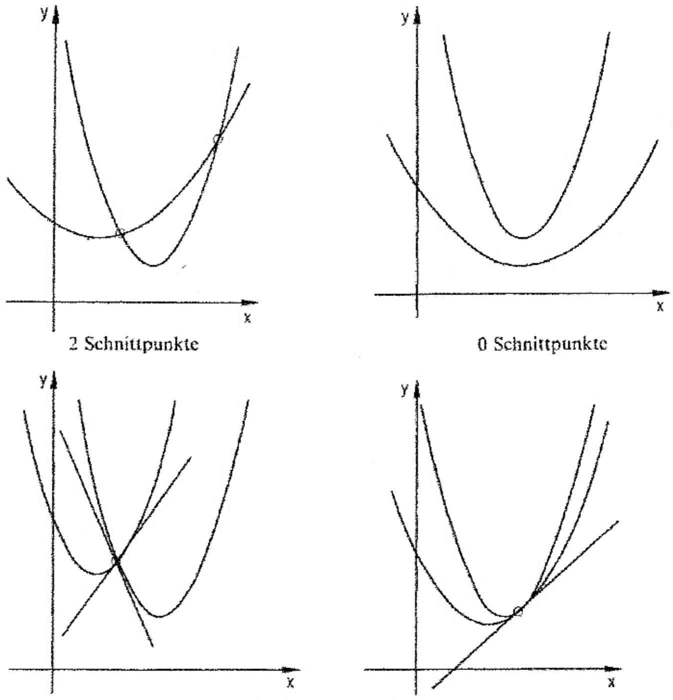
$\Rightarrow x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (1{,}5 - a)}}{1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2a-2}}{1}$

1) $2a - 2 = 0 \quad \Rightarrow a = 1$
ein gemeinsamer Punkt bei x = -1 $\quad \Rightarrow BP(-1/3)$

2) $2a - 2 > 0 \quad \Rightarrow a > 1$
zwei gemeinsame Punkte

3) $2a - 2 < 0 \quad \Rightarrow a < 1$
kein gemeinsamer Punkt

Schnittpunkte zwischen zwei Parabeln:



1 Schnittpunkt mit

verschiedenen Tangenten | gemeinsamer Tangente

Beispiele:

1. $p_1: y = x^2 - x + 2{,}25$

   $p_2: y = 0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1{,}125$

   $x^2 - x + 2{,}25 = 0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1{,}125 \quad \Rightarrow 0{,}5x^2 - 1{,}5x + 1{,}125 = 0$

   $x_{1/2} = \dfrac{1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}125}}{1} = \dfrac{1{,}5 \pm \sqrt{0}}{1} = 1{,}5$

   $y = 1{,}5^2 - 1{,}5 + 2{,}25 = 3 \quad \Rightarrow S(1{,}5 / 3)$

   Die Parabeln haben nur einen Punkt gemeinsam.

2. $p_1: y = -x^2 + 2x + 3$

   $p_2: y = x^2 - 4x + 3$

   $-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow -2x^2 + 6x = 0$

   $\Rightarrow -2x(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

   $y_1 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \quad \Rightarrow S_1(0/3)$

   $y_2 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 \quad \Rightarrow S_2(3/0)$

3. Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Parabel $p_a: y = -x^2 + ax + 3$ mit $a \in \mathbb{R}$ und der Parabel $p_2: y = x^2 - 4x + 3$ in Abhängigkeit von a.

   $-x^2 + ax + 3 = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow -2x^2 + ax + 4x = 0 \quad \Rightarrow -2x^2 + (a+4)x = 0$

   $\Rightarrow x(-2x + a + 4) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \qquad -2x + a + 4 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{2}a + 2$

   1) ein gemeinsamer Punkt, wenn $\dfrac{1}{2}a + 2 = 0 \quad \Rightarrow a = -4$

      $\Rightarrow x = 0 \quad y = 3 \quad \Rightarrow BP(0/3)$

   2) zwei gemeinsame Punkte für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$